

(公開授業Ⅱ)

第 1 学年 A 組 数学科学習指導案

日 時： 平成 29 年 7 月 7 日(金)

10:05-10:55

指導者： 山脇 雅也

場 所： 1 年 A 組教室

1. 単元名 資料(データ)の活用**2. 単元について****(1) 問題の所在**

資料(データ)の活用領域。個々の学習内容についての提案は多いが、単元計画についての提案は少ない。

我が国では、数学的な考え方の「事象を数理的に捉える」面の指導や統計教育において一層の充実の方向性にある。これは、日本学術会議数理科学委員会数学教育分科会(2016)、また、その提言を受けた平成33年度実施の学習指導要領(以下、次期学習指導要領と記す)からも明らかである。次期学習指導要領では、統計領域の学習内容の拡充がなされ「箱ひげ図」や「四分位範囲」といったデータ分析の手法も扱われることとなった。こうした動向から、中学校数学においても先行して「箱ひげ図」をデータの分析に活用するといった個別の学習内容についての授業提案がなされつつある(cf. 岡本¹; 峰野²)。一方、実践的にカリキュラム全体を構想する提案や組織的・計画的な指導についての提案は、より一層の充実が期待される状況である。そこで、本研究では、「数学的活動のレイヤー論」を基に単元計画を設計する。これにより、単に学習内容で規定される計画に対して、「単元を通して培う数学的活動」という具体性を与えることで、学習(達成)目標に不十分または欠落している学習内容を明らかにする視点を得ることができる。後述するが、こうした方法によって「単元を通して培う数学的活動」を位置付けていくと、統計的な探究により立説した仮説(最適解・納得解)を「検証する活動」の明確な位置付けが必要となる。本案による単元計画は、単に学習内容に基づく計画ではなく、学術的に組織的・計画的な単元計画として意義がある。

(2) 教材に対する反省と新しい提案

単元を通して培う数学的活動として、「仮説(最適解・納得解)の検証」も必要。

「仮説の検証」とは、「質の異なるデータによる妥当性の判断」と「表し方の異なるデータによる限界決定」

事象に対する探究において、問いを立てたものの答えがあるかどうかははっきりしないことがあり得る。こうした問いに対して局所的に捉えるのではなく、客観的な統計資料やデータから大局的に捉えて推測・判断し、最適解・納得解としての仮説を示すことが可能となる。一般に、こうした一連の探究活動が「統計的な探究のプロセス」と呼ばれる。日本学術会議数理科学委員会数学教育分科会(2016)によれば、諸外国では、小・中学校段階のカリキュラムから「統計的な探究のプロセス」として、PPDAC、DMAIC、PCPD など³が位置付けられている。よって、本案において、統計的な探究活動を学習指導するとき、まずはこれらの枠組みを規範として授業設計を試みる場所である。単元「資料(データ)の活用」において、こうした「統計的な探究のプロセス」を通して、それに伴う数学的な見方・考え方ならびに学習内容・用語等を

¹ 岡本大介「資料の活用」山口大学附属山口中学校第 64 回中学校教育研究発表会(2016 年 11 月 25 日)

² 峰野宏祐「四分位数・箱ひげ図を用いたデータ分析」東京学芸大学附属世田谷中学校公開研究会(2017 年 6 月 17 日)

³ PPDAC とは、Problem→Plan→Data→Analysis→Conclusion のサイクル。

DMAIC とは、Define the problem(課題をデータで解ける問題とするための数理的な仮説形成のステップ)→Measure the process(事象間のプロセスと関連性を踏まえた測定指標の決定)→Analyze the process(データに基づく事象間の関連性の分析)→Improve the process(予測モデルにしたがった最適解の決定と問題の改善)→Control the process(分析結果に基づく意思決定と管理)のサイクル。

PCPD とは、Plan→Collect→Process→Discuss のサイクル。

学習指導していくよう計画していく。ここに、いかなる数学的活動を位置づけるべきかが単元計画においての具体となる。一方で、「統計的な探究のプロセス」において推測統計するとき、単にデータの分布の傾向だけでなく、統計的仮説検定や区間推定、回帰モデルによる推測等が行われる。海外の統計教育においては、これらを「フォーマルな推測」とし、その前段階で、厳密な推測統計の手法・用語を使用せずに(インフォーマルに)、学校教育の早期から、入手したデータから得られる集計結果には標本誤差が伴うことを意識した結果の解釈や判断を行わせる方法⁴をとっており、これを「インフォーマルな推測」と言っている(ibid., p.16)。つまり、数学的な厳密さの程度にはよるものの、数学的な見方・考え方により、仮説を立説したり、検証したりすることが求められると言えよう。

ここで、一般的な単元計画として、教科書(啓林館, 平成 28 年度用)の小単元構成を考察する。単元の導入に「羽の長さの異なる2種類(5 cm と 7 cm)の紙コプターの滞空時間は、どちらが長いか」と問題提示し、実験によりデータを収集し、データの分析を通して傾向分析の手法を指導していくように展開されている。「統計的な探究のプロセス」を通して学習指導していく展開であり、この点について異論はない。しかし、教科書の「統計的な探究のプロセス」においては、仮説の検証について明確な記述がない。数学的活動のレイヤー論の視点で捉えると、もともとの題材で意図されていた「紙コプター改良の効果を、データを通じて明らかにしていく」活動⁵が明確に位置付けられていない点で不満である。具体的には、以下の二点である。

第一に、外れ値の扱いがなされていない。実験結果のデータが示されているが(p.202)、通常、このような実験でデータを得る場合、諸要因に伴い外れ値となるデータがあることの方が自然であるにも関わらず、模範的・理想的なデータが示されている。また、実際に実験をすると諸要因に伴い教科書に示されたデータと分布の傾向が一致しないこともあり得る。教科書の性質上、続く学習指導において都合のよいデータであろうが、得られたデータの質(標本誤差や標本変動)の検討は、仮説の立説と検証につながる極めて重要な活動である。

第二に、仮説の検証の視点が明確でない。次々と仮説を立説させていく展開で、内容の学習指導優先的である。紙コプターの問題に対して、すでに、羽の長さが 5 cm, 7 cm のデータ比較による仮説を立説させている(はずである)にもかかわらず、さらに 6 cm のデータを加えた度数分布多角形とし、「どんなことがいえるでしょうか。これまでに調べたことと、わかったことをまとめましょう」と単に問うに留まる(p.207)。度数の異なるデータを相対度数で比較することを扱いたいがゆえであろう。相対度数という内容事項に注力するほど、生徒は当初の仮説と関係なく新たに仮説を立説していたり、仮説の修正であることが無自覚であったりすることが考えられる。本来は、立説した仮説の真偽はどんなデータで明らかになるか、その仮説が真ならばどのようなことが推測できるかという検討がなされ、仮説の検証が行われるべきである(当然その先には、仮説の棄却や修正がなされるであろう)。

仮説の検証の活動を明確に位置づけるとするならば、例えば、上記の活動を、当初の仮説「羽の長い方が、滞空時間が長い」ことがどの程度正しいかを、「6 cm の羽のデータを調べることで確かめる」とする。そして、データ分析の視点として、「始めに出した結論(仮説)は、正しかっただろうか。次にどんなことを調べる必要があるだろうか。」と問う⁶。こうした活動により、単に「羽の長い方が、空気抵抗が大きい」という自然界の法則にも合致する」という程度の仮説の検証ではなく、まさに統計的な探究による仮説の検証となり、ここに数学的な価値が認められる。また、仮説はデータの表し方(階級の幅や範囲)によって妥当と言える条件が明らかになる。階級の幅を変えたり、階級の範囲を変えたりしていくことで、一つの山

⁴ 例えば、男子と女子で好きなスポーツの種類に違いがあるかどうかをクラスから入手したデータで判断する等、児童生徒の問題設定においても、集団の傾向や自然界の法則に起因するものが多い。そこで、得られたデータの違いだけで判断させるのではなく、隣のクラスや他の学校でも同じ結果になるのか、などの発問から、シミュレーション(必ずしも PC や乱数を使う必要はない)や実験等の活動を通じて、標本変動や標本誤差の存在とそのおおよその大きさを感じさせる学習方法がインフォーマルな推測である。(ibid., p.16)

⁵ 教科書指導書によると、もともと「どんな紙コプターを作れば、滞空時間がもっとも長くなるか」を考える題材である。羽の長さ以外にも全体のバランスや形状などさまざまな着想で紙コプターを改良することができ、改良する際の目の付け所と改良のしかた、それぞれの効果をデータを通じて計画的に明らかにしていくことができる。商品開発の基本的な考え方を学ぶ等の目的で企業研修などでも用いられるとのことである(p.201)。

⁶ 註3でも述べられているように、おそらく、羽の長さは無制限に長いほど滞空時間が長いことはなく、次に紙コプターの重量との兼ね合いが問題となり、探究活動が循環的になされるはずである。「統計的な探究のプロセス」はこうした循環性をもって、解の妥当性を高めていく趣旨にある。

に見えていたデータに双峰性を認められ得ることがある。こうした活動においても、当初の仮説が主張できる表し方の限界が決定される。これも、統計的な探究であり数学的に価値ある活動といえよう。つまり、「質の異なるデータを通して仮説の妥当性を判断すること」および「表し方の異なるデータにより仮説の限界を決定すること」こそを、本単元における「仮説の検証」の活動としたい。

以上を踏まえ、単元目標、単元を通して培う数学的活動および指導計画を次のように設定した。

単元目標:

データの分布について、数学的活動を通して、次の事項を身に付ける。

- ・ヒストグラムや相対度数などの必要性和意味を理解すること。
- ・コンピュータなどの情報手段を用いるなどしてデータを表やグラフに整理すること。
- ・目的に応じてデータを収集して分析し、そのデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断すること。

単元を通して培う数学的活動:

- ・統計的な問いに対して、調査の目的に応じて収集・処理したデータを根拠とする仮説の立説とインフォーマルな推測によってその検証をすること。

指導計画と当該授業時間における主な数学的活動:

- 第1時 統計的な探究(本時)……………データから判断しよう・確かめよう
- 第2時 度数分布表とヒストグラム……………階級値を変えて分析しよう
- 第3時 近似値……………データの正確さを表現しよう
- 第4時 度数分布多角形……………複数のデータを比較して分析しよう
- 第5時 相対度数……………度数の異なるデータを分析しよう
- 第6時 代表値(最頻値)……………最頻値をもとにデータを分析しよう
- 第7時 代表値(平均値, 中央値)……………代表値をもとにデータを分析しよう
- 第8時 散らばり……………データの散らばりを考えて判断しよう
- 第9時 分布の形と代表値……………データの分布と代表値の大小関係を調べよう

(3) 子どもたちの学びの実態と期待する学び方

統計的な探究は初めて。まずは統計的な探究的なプロセスを経験すること。その中で、仮説の立説と検証を期待。

大半の生徒は、統計的な探究活動を初めて行うこととなる⁷。後に、生徒による自主的な問題解決の一つの手段として、統計的な探究を行うことを期待するところではあるが、本時においては、その探究の方法を、教師の発問(支援)によって構成する必要がある。とはいうものの、単元を通して培う数学的活動として設定した「仮説の立説と検証」につながる生徒の活動を期待したい。具体的には、データを分析することは、単に「その特徴を述べる」に留まらず、「その特徴があるからこそ、どのようなことが言えるか」までを期待する。さらに、「別のデータでも言える」ことにその妥当性を求める仮説検証の態度も期待する。

(4) 本時の学習に向けた教材研究

長方形の美しさに対する仮説は、質の異なるデータをもって、その妥当性を検証する。

本時は「美しい長方形はどんな長方形か？」を原問題とした。これは、1授業時間内で、仮説検証のためのデータを得ることに適しているためである。1授業時間内で、仮説検証のためのデータを再度得るための時間を考慮すると「紙コプターの問題」は適していない。生徒がそれぞれに描いた「美しい長方形」のデータを、集団の傾向を得るためのデータとするとき、どちらか一辺が基準の長さになるよう拡大・縮小する。再度、長方形を描くことなく、一度得た測定値をもとに、

⁷ 少なくとも中学校入学以来、数学の授業において。個人的には、小学校理科または社会科の自由研究などで実質的には統計的な探究を行ったり、学んだりしている生徒もいることも考えられ得る。

基準の長さを変えることによって、値の異なるデータを得ることができる。これにより、当初のデータから立説した仮説を、別のデータで検証していく活動を行うことができる。

先行クラスの実践から、次のようなデータが得られた。なお、データは、いずれか一边を 5 cm に拡大・縮小したときの他方の辺の長さ(cm)である。

3.6	9.9	10.0	8.0	2.5	3.5	3.8	8.3	2.0	7.1
6.7	6.7	9.7	7.5	4.0	7.5	5.8	7.5	10.0	7.5
8.0	7.5	7.5	7.5	7.5	7.2	10.0	3.8	7.5	5.5
10.0	8.0	6.7							

これらをヒストグラムに表すと、図 1, 2 の通りである。

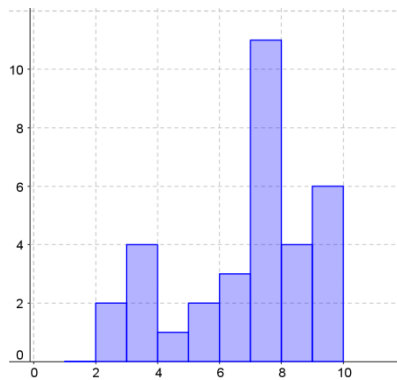


図 1 : 階級の幅 1 cm のヒストグラム

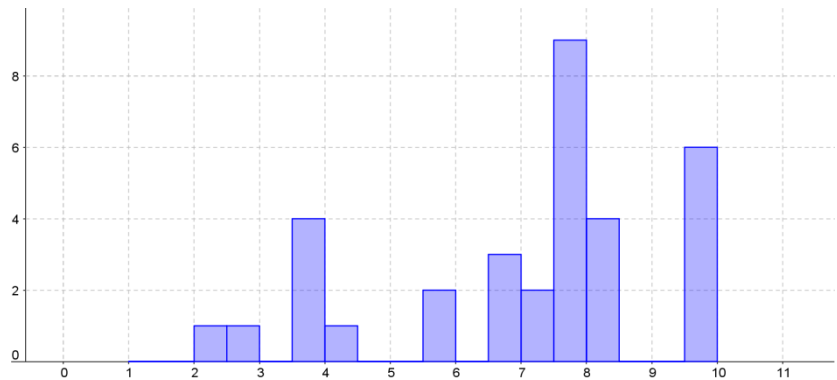


図 2 : 階級の幅 0.5 cm のヒストグラム

図 1 から分布の傾向をよみ取ると、7~8 cm の階級が最頻値であり、ここを「美しい」長方形とする仮説が立説できる。また、9~10 cm や、3~4 cm、8~9 cm も比較的度数が多く、ここも「美しい」と認めることもできなくはない。この仮説を、階級の幅を半分にしたヒストグラム(図 2)で検証する。図 2 の分布の形は、最頻値となる階級を中心に左右に小さい山のある多峰性の分布である。これは、図 1 の分布と「ほぼ同じ」であるとみなすことができる(インフォーマルな推測)ことから、当初の仮説は、妥当であると言える。一方、図 1 で比較的多い度数であった 8~9 cm の階級は、図 2 で見ると、最頻値に近い分布であることが分かる。このことから、当初の仮説を、「7~9(8.5) cm が美しい」と修正することもできる。

さらには、このように山が多峰性になる理由をデータの質に求めると、縦長の長方形と横長の長方形が混在していることが分かる。これらを短辺に対する長辺の比として、データを処理(短辺:長辺 = 5:x)し、ヒストグラムに表すと図 3 となる。図 3 の分布は双峰性で、最頻値 7~8 cm がより際立って見える。このデータは、黄金比や白銀比に近い値であることが確認される。

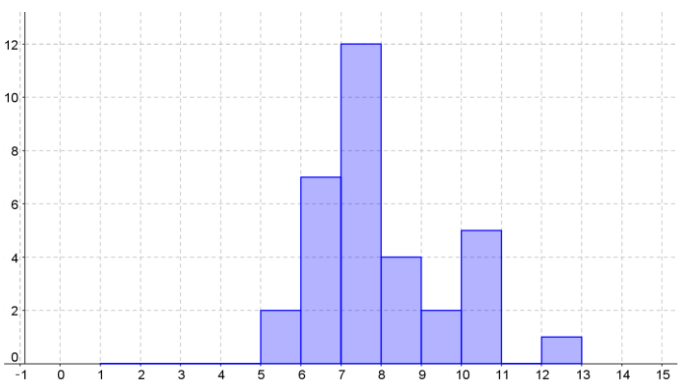


図 3 : 短辺 5 に対する長辺の比で表したデータによるヒストグラム

また、図 4 のように、テクノロジーを活用すると、容易に階級の個数や幅を様々に変えてデータをヒストグラムに表すことができる。どの表し方においても、10 cm 付近の度数が多いこともよみ取れ、このデータにおいては、辺の比が 1:2 の長方形も「美しい」と主張できる。

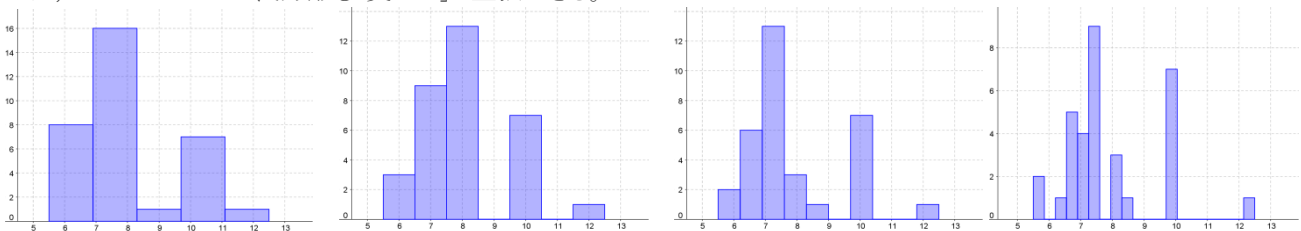


図 4 : 階級の個数と幅を変えたヒストグラム

3. 本時の学習

(1) 本時目標

- ・合目的なデータをヒストグラムに表すことを通して、データの傾向を分布や範囲をもとに分析し仮説を立てるとともにその仮説の検証をインフォーマルな推測によって行うことができる。

(2) 教師の支援と期待する数学的活動

P: 問題の相

↓ …どんな情報(データ)が必要?(目的に応じたデータ収集への支援)

P: 計画の相

↓ …データをどのように集計していけばいい?(目的に応じたデータ処理への支援)

D: データ収集の相

↓ …データを根拠にして, 判断/決定しよう。(データを根拠とする仮説の立説への支援)

A: 分析の相

↓ …どうすれば, 判断/決定のより確からしさが示せる?(仮説の検証への支援)

C: 結論の相

↓ …次にどんなことを考えることが必要?(さらなる, 仮説の検証とデータの理解への支援)

「問題の相」の活動 「美しい」と長方形は, データを基にして仮説を立説できるとの見通しをもつ

「計画の相」の活動 長方形の形を決定するのは, 辺の長さであることから, それをデータとして収集する
辺の長さは長方形の大きさに依存することから, 一方の長さの基準をきめてデータを収集する

「データ収集の相」の活動 収集したデータをヒストグラムに表す

「分析の相」の活動 ヒストグラムによるデータの分布に着目し, 最頻値(または度数の比較的多い階級)から仮説を立てる
別のデータによる(表し方を変えた)ヒストグラムから, 仮説の検証や修正を行う

「結論の相」活動 仮説の検証のもとに, 納得解・最適解を得る。さらに妥当性を高めるために, データや仮説の真偽について再検討する

(3) 本時の展開⁸(支1一般的な支援⁹, 支2特殊な支援⁹, ○発問, ・生徒に期待する活動, ※留意点)

[P 問題の相]データを基に問題解決していく見通しを立てる

※口頭で問い, 板書する。

問題 美しいと思う長方形は, どんな長方形?

※「美しい」と思うかどうかは, 個人によって異なることから一意に決定できないことを確認し, 生徒それぞれの「美しいと思う長方形」のデータを集めて「数学的(統計的)に」仮説を立説することを本時の課題として設定する。

※学習課題として, 「みんなの『美しい』を集めて, 『.....な(の)長方形が美しいのでは?』と きめよう」と提示する。

○集める「美しい」の基となる, 自分の「美しいと思う長方形」を, まずは描いてみよう。

※ワークシート(正方形)を配布する。長方形をいくつか描かせ, 自分の思う「美しい長方形」を描かせる。

支1 問題を解決するために, どんな情報(データ)が必要?

支2 「美しい長方形」をきめるために, みんなが描いた長方形の何の情報(データ)を集めればよい?

※「どのような長方形を描いたか発表して」と問いかけることから始め, 対話を通して「美しい長方形」を判断するデータとして, 何を言えばよいかを引き出していく。必要に応じて「長方形の形は何で決まるか」と問い, 辺の長さを引き出す。

[P 計画の相]計画的なデータ収集の方法とその処理を検討する

・辺の長さ (5.5, 4.0), (4.5, 6.5), (2.5, 2.0), (4.0, 3.0), ...

※測定値は定規で, mm まで求めさせる。

※単位を cm とし, 縦, 横の長さを組みとし板書することを断る。

・拡大・縮図 (5, 3.6), (5, 7.2), (5, 4.0), (5, 6.0), ...

※比については, 小数第 3 位を四捨五入して求めさせる。

※辺の長さでは大きさがそれぞれであるので, 一方の辺(縦)を基準とした拡大・縮図によりデータを収集することが合理的であることを確認する。

・拡大・縮図 (10, 7.2), (10, 14.4), (10, 8.0), (10, 12.0), ...

※仮説の検証のためのデータ。実質的には同じデータであるが, 階級の幅は 5 cm のときと(暗黙裡に)変えないので, 度数は散らばる(階級の幅は実質半分となるので)。

[D データ収集の相]データを階級別に列挙し, ヒストグラムを作成する

・ヒストグラムに表す

※比を, 順々に発表していくのではなく, 階級の幅を設定し, 仕分けながら集めていくよう指示する。具体的には, 付箋に 5 cm の辺に対する比のデータを書き, 付箋自体が累積度数として簡易的なヒストグラムとなるように処理する。

※階級の幅の設定については, 示されているデータから, 整数値となるよう 1 cm とすることを合意する。

支1 **支2**
どう集計すればいい?
データを仕分けしながら集めよう

支1 どうすれば, より確からしさが示せる?

支2 別のデータでも, 同じ結果になるか確かめてみよう

支1 データから, 決定しよう

支2 ヒストグラムから, 「美しい」をきめよう

[A 分析の相]データの傾向による仮説の立説と検証

・5 cm, 7.5 cm の長方形が美しいと思う人が多い。(階級値としての最頻値による判断)

・5 cm, 7.0~8.0 cm の長方形が美しいと思う人が多い。(度数の最も多い階級による判断)

・5 cm, 3.0~4.0 cm や 10 cm の長方形もやや多い。(多峰性を考慮した判断)

※ヒストグラムをどのように見たか, 仮説立説の根拠を問い, データをもとにした推測であることを再確認する。

○どうすれば, これら(仮説)の確からしさが示せるだろうか? 数学的な「証拠集め」¹⁰をしよう。

※別のデータによるヒストグラムでも同様な傾向がよみ取れることで, 仮説の妥当性の検証できることを確認する。

⁸ 仮説の立説と検証を重視した統計的な探究のプロセスの学習指導はいかにあるべきか, まだ十分に検討できていない。そこで, 本時の学習指導では, 暫定的にその規範として PPDAC サイクルで展開していくことを試みる。つまり, PPDAC サイクルに誘う教師の発問(支援)とそれに対する生徒の活動によって, 授業を構成していくことを考えた。よって, 通常の問題解決の授業のように, 生徒に期待する課題または活動を設定し, それを実現する支援による活動のつながりを記述していく指導過程の形式に合わない。したがって, 生徒に期待する活動を, PPDAC の相に位置付けていくことで指導過程の記述を試みる。当然, 探究活動において各相の往還があり, それを矢印で表現している。このため, 時系列に沿うと, 必ずしも PPDAC を順に経るとは限らない。

⁹ 生徒の活動を促進し, 次の活動に誘う教師の手立てである。「特殊な」支援が, 当該の問題解決に対して直接的に有効な「行為」や「具体的な問い」を示す場合が多い。それに対して, 「一般的な」支援は, 当該の問題解決以外にも有効な「見方・考え方」を示す場合が多い。こうした長期的な学習指導により, 「一般的な」支援を生徒が方法知として獲得していくことを期待する。

¹⁰ 「証拠集め」とは, 本校第1学年理科担当服部教諭による科学的探究活動における仮説検証へ誘う支援。理科では, 実験や観察, 標本収集などを生徒に期待する。

・10 cm, 15 cm が美しいと思う人が多い。5 cm のときと、グラフの形が似ている。
 ・10 cm, 7~8 cm が美しいと思う人も多い。5 cm のときでも、確かにやや多い。
 ※10 cm の分布の傾向を単によみ取るのではなく、5 cm の分布の検証として、ヒストグラムの形状の類似性に着目させる。
 ※逆に 10 cm の分布からよみ取れたことを、5 cm の分布で確認することで、仮説を修正することも認めていく。



支1 次に、どんなことを考えることが必要？

支2 この長方形の

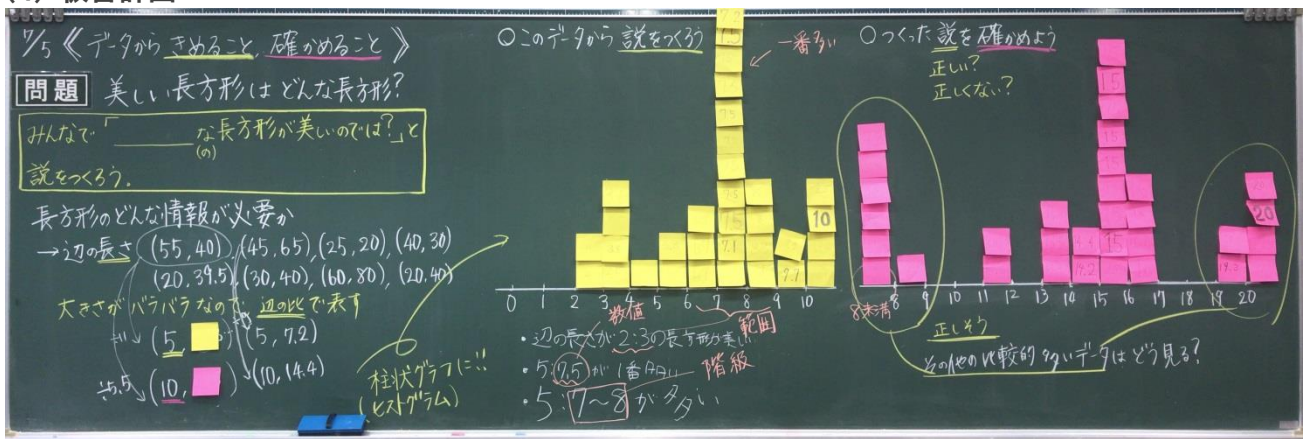
※結論としての仮説に対して、データの多峰性を解釈していくとき、どうしてこのような散らばりができるのか改めて問い、再度データの質がどうであったか検討していく。これにより、長方形が縦長か横長かを統一して、データを表し直すことを求めることを期待する。

【C 結論の相】 妥当な結論としての仮説(最適解・納得解)を得る
 ・辺の比で表すと、2:3 の長方形が美しいと思う人が多い。

※授業の終末に、本時の探究活動について振り返りを行う。以下の点について教師が整理した後、各自で「まとめ」を行い、次時につなげる。

- ・本時は、データを基に仮説を立説し、それをデータで検証したこと。
- ・そのために、合目的なデータ収集とデータ集計を行ったこと。
- ・立説した仮説は暫定的であり、妥当性を高めることと仮説の理解をするために、再度データやその表し方の検討が必要なこと

(4) 板書計画



プレ授業の板書 (2017/07/05 実践)

参考文献および資料

岡本和夫ほか編(2015). 『未来へひろがる数学 1』. 新興出版社啓林館.
 岡本和夫ほか編(2015). 『未来へひろがる数学 1 指導書』, 第2部詳説朱註編. 新興出版社啓林館.
 国立教育政策研究所教育課程研究センター(2013). 「みんなが美しいと思う長方形に特徴があるか考えよう」, 『平成 25 年度全国学力・学習状況調査の結果を踏まえた授業アイデア例』, pp15-17.
 総務省(2016). 『生徒のための統計活用～基礎編～』. 総務省政策統括官(統計基準担当)付統計企画管理官室.
 日本学術会議数理科学委員会数学教育分科会「初等中等教育における算数・数学教育の改善についての提言」(2016年5月19日)
 溝口達也(2015). 「カリキュラム開発における数学的活動とそのネットワークの方法論的考察」. 日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集, pp.57-62.